

O Conceito de Média em Futuros Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Paula Maria Barros

pbarros@ipb.pt

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança

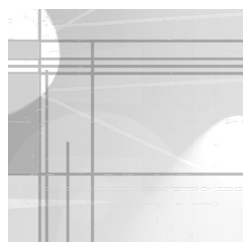
Campus de Santa Apolónia · Apartado 1101 · 5301-856 Bragança

José António Fernandes

jfernandes@iep.uminho.pt

Universidade do Minho, Instituto de Educação e Psicologia

Campus de Gualtar · 4710-057 Braga



Resumo

Neste texto caracteriza-se o conceito de média aritmética de alunos do 4.º ano do curso de Professores do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza, de uma Escola Superior de Educação, futuros professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.

O estudo desenvolveu-se em duas fases distintas: na primeira, todos os alunos responderam a um questionário envolvendo conceitos elementares de estatística e probabilidades e, na segunda, seguiu-se a prática lectiva (Estágio) de três destes alunos que leccionaram a unidade didáctica de Estatística de 6.º ano através da observação das aulas, de entrevistas individuais e de breves conversas informais.

Os resultados obtidos revelam que os alunos conhecem o algoritmo da média aritmética mas têm várias dificuldades na sua aplicação a situações não rotineiras e na sua interpretação e atribuição de significados, ou seja, possuem um conceito de média desenvolvido nos seus aspectos algorítmico e técnico e muito limitado nos seus aspectos de compreensão. Na segunda fase do estudo, este conceito de média reflectiu-se na prática lectiva das três alunas que foram acompanhadas, induzindo-as a seleccionar tarefas em que não tinham dificuldades, explorando-as de forma pouco flexível e depositando pouca confiança nas capacidades dos alunos para resolverem tarefas mais elaboradas.

Palavras-chave

Conceito de média aritmética; Dificuldades; Formação inicial; 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.

Key Words

Arithmetic mean concept; Difficulties; Pre-service teacher education; Elementary level.

1. Introdução

A vida dos cidadãos é cada vez mais regulada por indicadores numéricos, muitos dos quais gerados por processos que têm por base conhecimentos estocásticos. Os meios de comunicação social usam a linguagem, as técnicas e os processos estatísticos para sustentar afirmações nos mais diversos domínios. Os “jogos de azar” estão cada vez mais presentes no dia-a-dia, podendo dar uma falsa imagem de lucro fácil a indivíduos menos informados. Torna-se, assim, imprescindível que qualquer pessoa adquira competências na área de estatística e probabilidades de forma a ser capaz de gerir e utilizar a informação que lhe chega para tomar as suas decisões conscientemente. Nesta perspectiva, a estocástica “desempenha um papel fundamental na formação para a cidadania” (Ponte & Fonseca, 2000, p.179). Consequentemente, “desenvolver o pensamento estatístico e probabilístico ao longo da escolaridade constitui um aspecto

importante da formação que a escola deve proporcionar” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p.94) para o exercício de uma cidadania crítica, reflexiva e participativa.

Deste modo, considerando a necessidade de formar estudantes habilitados a raciocinar estocasticamente, coloca-se a questão de saber se os futuros professores, que têm de ensinar os temas de estatística e probabilidades, os compreendem de forma adequada e possuem os conhecimentos necessários para levar os alunos a raciocinarem correctamente sobre os vários assuntos a eles ligados.

Tendo por base esta preocupação, realizou-se um estudo com alunos do 4.º ano de uma Escola Superior de Educação, futuros professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, com o intuito de: (a) Identificar dificuldades e processos de raciocínio de futuros professores em aspectos elementares ligados aos conteúdos de estatística e probabilidades; (b) Identificar dificuldades de futuros professores no planeamento e execução de aulas sobre o tema; (c) Descobrir os factores subjacentes às opções que os futuros professores adoptam na sua prática lectiva; (d) Compreender de que forma as dificuldades sentidas influenciam a sua prática lectiva; (e) Averiguar se a prática lectiva induz uma reflexão sobre as dificuldades e provoca mudanças de raciocínio.

Neste texto apresentam-se apenas resultados relativos ao conceito de média aritmética, visando-se, mais directamente, os objectivos (a) e (d).

2. Dificuldades envolvendo o conceito de média aritmética

Embora a noção de média aritmética seja aparentemente simples, há, no entanto, investigações que patenteiam dificuldades conceptuais e procedimentais relacionadas com este conceito em alunos de diferentes idades.

Pollatsek, Lima e Well (1981) verificaram, em várias situações, que muitos estudantes universitários sentiram dificuldades no cálculo de uma média global a partir do conhecimento de duas médias parciais. Nestas situações, a maior parte das respostas incorrectas resultou de determinar a média simples dos valores das duas médias dadas, não afectando os seus valores com os pesos adequados. Boaventura (2003) observou dificuldades do mesmo tipo em alunos do 12.º ano e Li e Shen (1994) também verificaram a não ponderação no cálculo da média quando os dados eram apresentados através de uma tabela de frequências.

Mevarech (1983) ampliou a investigação de Pollatsek *et al.* (1981), verificando que a maioria dos estudantes universitários usaram a lei do fecho no cálculo da média total de dois grupos (o que corresponde a calcular a média simples dos valores das duas médias dadas), aplicaram a propriedade associativa no cálculo da média total de três grupos, não

compreenderam a não existência de elemento inverso no cálculo de uma média aritmética e, em menor percentagem, consideraram o valor 0 (zero) como elemento neutro, isto é, o valor da média não se altera quando se acrescenta o valor zero ao conjunto de dados. Embora os estudantes reconhecessem as fórmulas de cálculo da média simples e ponderada, para o autor apenas poucos deles possuíam o conjunto de estruturas conceptuais necessárias para a resolução dos problemas propostos.

Com o objectivo de estudar como é que as estratégias dos estudantes para resolver problemas de média ponderada mudam ao longo da escolarização, Gattuso e Mary (1998) realizaram um estudo com estudantes do 8.º ao 10.º ano (de 13 a 15 anos), tendo verificado haver uma melhoria com a instrução, sem que tal melhoria persistisse no tempo. De entre os alunos que participaram no estudo, os do 10.º ano tiveram a mais baixa percentagem de respostas correctas em 7 das 10 questões e os do 9.º ano, que tinham recebido instrução recente sobre o tema, tiveram melhor desempenho do que os do 8.º ano e do 10.º ano na generalidade dos casos. Além disso, os resultados do 8.º ano revelaram que alguns destes alunos foram capazes de determinar uma média ponderada mesmo sem ter sido dada qualquer instrução específica.

No estudo de Gattuso e Mary, os alunos cometeram, entre outros, os seguintes erros: calcular o quociente da soma dos valores que toma a variável pela soma das frequências (resposta observada particularmente entre os alunos do 10.º ano); usar a média aritmética simples ignorando o peso dos dados (resposta mais observada entre os alunos do 10.º ano, quando o problema era apresentado sob a forma de tabela); e utilizar o número de linhas ou de dados diferentes como denominador, com numeradores variados. Estes erros traduzem uma certa incompreensão do cálculo da média ponderada, já que os alunos não ponderaram adequadamente os valores da variável ou inventaram fórmulas não adequadas.

Relativamente à média aritmética, Strauss e Bichler (1988) estudaram, em alunos dos 8 aos 14 anos, o desenvolvimento da compreensão de algumas das suas propriedades: (a) a média é um valor compreendido entre os extremos da distribuição; (b) a soma dos desvios dos dados relativamente à média é zero; (c) a média é influenciada pelo valor de cada um dos dados; (d) a média não tem que ser igual a um dos valores dos dados; (e) para a variável considerada, a média pode ser uma fracção que não tenha sentido na realidade; (f) tem que se ter em conta os valores nulos no cálculo da média; e (g) o valor da média é um “representante” dos dados a partir dos quais foi calculada.

Nas tarefas relativas à propriedade (b), poucos alunos deram respostas correctas. No caso da propriedade (f), aproximadamente 25% dos alunos de 8 anos, 20% dos de 10 anos, 45% dos de 12 anos e 60% dos de 14 anos resolveram correctamente as tarefas. A afirmação incorrecta de

que a 'adição do zero não altera a média', isto é, considerar zero como elemento neutro (concepção errada identificada por Mevarech, 1983), foi dada por 5%, 21%, 31% e 15% dos alunos de 8, 10, 12 e 14 anos, respectivamente.

No caso das tarefas relativas à propriedade (g), apenas alguns alunos de 8 anos, 25% de 10 anos e 60-65% dos de 12 e 14 anos as resolveram correctamente. Segundo os autores, o grande número de respostas não justificadas, mesmo dos que responderam correctamente, traduz que os alunos tiveram dificuldades em compreender as tarefas. As justificações que foram dadas para as respostas incorrectas foram variadas, sendo por vezes uma reafirmação da resposta dada. Uma das respostas incorrectas mais referida foi escolher o dado com maior valor numérico como o mais representativo da distribuição, dizendo que esse número descreve melhor o grupo. Verificou-se também que algumas das crianças mais novas basearam-se em razões sociais para justificarem a sua resposta.

Os resultados que Strauss e Bichler (1988) obtiveram sugerem uma melhoria da compreensão das propriedades com a idade e indicam diferenças na sua compreensão, tendo observado um melhor desempenho nas tarefas respeitantes às propriedades (a), (c) e (d) do que nas respeitantes às propriedades (b), (f) e (g). Além disso, para cada uma destas propriedades, os autores utilizaram diversas tarefas variando o tipo de dados (contínuos e discretos) e os meios de apresentação (verbal, numérico e concreto), não tendo encontrado efeitos significativos relativamente ao tipo de dados ou aos meios de apresentação utilizados.

As propriedades (a), (b), (f) e (g) foram posteriormente investigadas por Leon e Zawojewski (1991) num estudo com estudantes do 4.º e 8.º anos e do ensino superior. As suas conclusões corroboram as de Strauss e Bichler (1988), já que os sujeitos tiveram cerca do dobro das dificuldades na compreensão das propriedades (f) e (g) relativamente às propriedades (a) e (b). Leon e Zawojewski (1991) observaram também que a idade tem uma influência importante no aumento da compreensão destas propriedades e que a contextualização das tarefas facilita muito a sua resolução.

No nosso país, Boaventura (2003) estudou, em alunos do 12.º ano, as afirmações: (a) a média de um conjunto de dados nunca é igual a um dos dados; (b) a média de um conjunto de dados é sempre um valor compreendido entre o menor e o maior dos dados; (c) se acrescentarmos o valor 0 (zero) ao conjunto de dados, o valor da média não se altera; (d) se acrescentarmos o valor da média ao conjunto de dados, o valor da média não se altera; e (e) dois conjuntos de dados diferentes podem ter a mesma média.

Em termos de resultados, a autora obteve percentagens de respostas correctas de 85% a 94% nas tarefas relativas às afirmações (a), (b) e (e),

62% na afirmação (c) e 48% na afirmação (d).

Por vezes, o algoritmo da média é também aplicado de forma mecânica, não revelando os alunos capacidades da sua utilização flexível em situações-problema. Num estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade, em que a maioria evidenciou conhecer o algoritmo de cálculo da média, Cai (1995) observou que apenas cerca de metade dos alunos foram capazes de determinar um valor desconhecido num pequeno conjunto de dados, apresentado sob a forma de pictograma, para se obter um dado valor da média. Este resultado agravou-se ainda mais quando se analisaram os raciocínios usados, pois, dos alunos que encontraram o valor desconhecido, apenas aproximadamente metade o determinou através de uma utilização compreensiva do algoritmo (multiplicar o valor da média pelo número total de dados e subtrair a soma dos valores dados), tendo a maioria dos restantes recorrido a uma estratégia de tentativa e erro.

Quanto às respostas erradas, para além de erros não compreensíveis, Cai (1995) identificou quatro tipos de erros, que classificou como: erro menor, em que os alunos apresentaram processos de resolução correctos mas cometeram erros de cálculo ou deram como resposta o número total de efectivos (11%); violação da regra de paragem, em que os alunos usaram estratégias de tentativa e erro mas pararam quando o quociente não era a média dada, quando o resto não era zero ou quando o quociente não era a média dada e o resto não era zero (10%); uso incorrecto do algoritmo, em que os alunos aplicaram directamente o algoritmo mas de forma incorrecta (34%); manipulação simbólica injustificada, em que os alunos tomaram alguns números da tarefa e trabalharam com eles num caminho irrelevante para o contexto do problema (24%).

Sobre o conceito de média, Carvalho (1996) analisou as realizações de dois grupos de alunos do 7.º ano, cada um numa tarefa distinta. Num dos grupos, foi dado um conjunto de dados que os alunos deviam organizar numa tabela de frequências; no outro, os dados foram apresentados através de um gráfico de barras. Foi na tarefa estabelecida através do gráfico que os alunos revelaram mais dificuldades.

No que diz respeito às dificuldades dos alunos, Carvalho (1996) salienta que, no caso da tarefa em que se partiu do gráfico, os alunos não consideraram as frequências absolutas dos diferentes valores no cálculo da média, isto é, calcularam o quociente da soma dos diferentes valores da variável pela dimensão da amostra.

Em relação à interpretação da média num dado contexto, Eisenbach (1994, citado em Batanero, 2000) questionou estudantes universitários de um curso introdutório de estatística sobre o significado da afirmação: 'Que quer dizer que o salário médio de um empregado é de 3600 dólares?' As respostas obtidas, do tipo 'a maioria dos empregados ganha cerca de 3600 dólares', 'é o salário central' e 'os outros trabalhadores ganham

mais ou menos 3600 dólares', denotam uma confusão terminológica entre as palavras 'média', 'mediana' e 'moda'. Também no estudo já referido, Boaventura (2003) verificou que os alunos interpretaram a média como a descrição do seu algoritmo.

Dreyfus e Levy (1996), num estudo com alunos de 11 e 12 anos, observaram que os alunos consideraram a média como o valor central, o que denota uma confusão da média com a mediana. Estes autores detectaram ainda concepções erradas sobre as relações entre a média e a distribuição, pois um número substancial de alunos afirmou que numa distribuição variada é impossível calcular a média e que não é possível em duas turmas com a mesma média os alunos falharem mais numa turma do que noutra. Para estes alunos, se mais alunos falham, então a média da turma devia ser mais baixa.

No que se refere a alunos do ensino superior, alguns dos quais futuros professores do ensino primário espanhol, Batanero, Godino e Navas (1997) detectaram a existência de erros conceptuais e dificuldades de aplicação prática dos conhecimentos sobre a média aritmética, por exemplo no tratamento dos valores atípicos. Assim, num item em que se pedia para estimar o peso real de um objecto, dado um conjunto de dados em que se introduziu um valor atípico muito extremo, 34% dos estudantes utilizaram-no no cálculo da média, embora fosse óbvio que se devia tratar de um erro de medição. Já noutro item, em que se pretendia calcular o número típico de perguntas feitas num dia por oito estudantes de uma turma, em que era dado um registo do número de perguntas feitas por cada estudante e onde se incluiu um valor atípico, 30% calculou a média desprezando o valor atípico. No entanto, neste caso, devido à variabilidade dos dados e ao efeito do valor atípico sobre a média, este devia incluir-se na análise, já que a sua supressão afectaria consideravelmente o valor "representativo" do conjunto de dados.

Batanero *et al.* (1997) pensam que as dificuldades evidenciadas se podem explicar pelo facto do ensino das medidas de tendência central, e portanto também da média, se centrar habitualmente na apresentação das fórmulas aplicadas a casos estereotipados, o que não permite que os alunos compreendam o significado integral dos conceitos.

3. Metodologia do estudo

O estudo realizado desenvolveu-se em duas fases, cada uma com uma metodologia diferenciada. Na primeira fase, em que se seguiu uma metodologia essencialmente quantitativa, uma turma de 37 alunos do 4.º ano do curso de Professores de Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza, futuros professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, respondeu a um questionário cujas questões se reportavam a conceitos elementares de estatística e probabilidades (nove questões

sobre as medidas de tendência central e quatro sobre acontecimentos e comparação de probabilidades). Estes alunos, à excepção de três, tinham frequentado com sucesso a disciplina semestral de Probabilidades e Estatística, no ensino superior.

Na segunda fase, em que se seguiu uma metodologia de estudo de caso, seleccionaram-se três dos participantes da primeira fase (Maria, Joana e Teresa), usando-se como critério fundamental para a sua escolha o facto de leccionarem a unidade didáctica de Estatística de 6.º ano, no âmbito da disciplina de Prática Pedagógica II (Estágio). Através de entrevistas semi-estruturadas, conversas informais, observação de aulas e recolha de documentos escritos acompanhou-se o seu percurso durante a leccionação da unidade de Estatística. Estas três participantes, após terem leccionado a unidade, analisaram, ainda, as respostas dadas ao questionário administrado na primeira fase e indicaram as alterações que fariam em termos de respostas e de raciocínios.

Para a análise dos dados do questionário (primeira fase) classificaram-se as respostas em correctas e erradas e definiram-se categorias com base nos raciocínios utilizados. Em ambos os casos, foram fundamentalmente determinadas frequências relativas em percentagem, separadamente para as respostas e para os raciocínios em cada questão.

No que concerne aos dados da segunda fase, a sua análise foi feita caso a caso tendo em conta os resultados obtidos e seguindo as orientações que guiaram o estudo.

4. Apresentação de resultados

Nesta secção apresentam-se os resultados provenientes dos dois contextos de estudo: o questionário e a prática lectiva. De relembrar, que este artigo versa apenas sobre as questões e situações que envolvem exclusivamente o conceito de média aritmética.

4.1. Respostas e raciocínios no questionário

Neste ponto apresentam-se as respostas e os raciocínios elaborados pelos alunos na resolução das tarefas do questionário (ver Anexo), envolvendo o conceito de média aritmética.

Questão 1

Relativamente às preferências de clube desportivo dos 200 alunos de uma escola, cuja distribuição era apresentada sob a forma de um gráfico circular, pretendia-se averiguar da possibilidade de calcular a média.

Apenas 38% dos alunos afirmaram correctamente que não era possível calcular a média, tendo uma percentagem considerável (57%) determinado a média das frequências absolutas ou relativas.

A análise dos raciocínios permite concluir que as dificuldades são

mais acentuadas do que poderia parecer apenas pelas respostas, já que somente 14% dos alunos justificaram a sua resposta de forma correcta, referindo explicitamente que se tratava de uma variável qualitativa ou afirmaram esse facto de forma menos directa ao alegarem que “estamos em presença de nomes e não de números” ou que “não é possível atingir um valor numérico que expresse a média”. Tendo havido respostas correctas que tiveram como base argumentos não matemáticos, os alunos apresentaram razões que tinham a ver com o clube ou com a falta de dados: “estão vários clubes envolvidos”, “foram os alunos a escolher o clube” e “não estão especificados os clubes representados por outros”, referindo-se, neste último caso, à categoria “Outros” do gráfico dado.

De notar que 19% dos alunos não apresentaram qualquer justificação, tendo 86% deles dado uma resposta correcta. Fica-se assim na dúvida se o raciocínio que utilizaram para responder à questão se baseou ou não em argumentos válidos.

Questão 2

Relativamente às classificações finais a Matemática de duas turmas A e B, colocaram-se as seguintes afirmações: “as classificações mais altas foram obtidas na turma A”; “na turma A não existe qualquer aluno com a classificação de 14 valores”; “o João, da turma B, obteve a classificação de 16 valores”; “50% dos alunos da turma B obtiveram classificação inferior ou igual a 13 valores”. Seguidamente, questiona-se se as médias das classificações das turmas A e B podem ser ambas de 14 valores.

A maior parte dos alunos (70%) respondeu correctamente, afirmando que ambas as médias podem assumir os valores calculados, tendo 62% baseado a sua resposta em argumentos válidos. Para tal, 30% consideraram a *heterogeneidade dos dados*, usando alguns deles argumentos relacionados com a possível *compensação das classificações*, como por exemplo: “podem existir valores altos que vão compensar os mais baixos” e “pelo facto de uma turma ser heterogénea há variação de valores”; 11% fizeram apelo ao *algoritmo da média*, invocando que a média resulta da “soma feita a todas as classificações a dividir pelo número total de alunos” ou aplicando o algoritmo a valores que escolheram, tendo ainda 11% dos alunos combinado estes dois raciocínios. Houve também alunos (11%) que remeteram a sua justificação para o enunciado dizendo que “nenhuma das informações dadas impede que as médias estejam correctas”.

Quanto às respostas incorrectas (22%), elas resultaram, essencialmente, de uma *interpretação incorrecta* dos dados fornecidos no enunciado, verificando-se que a percentagem de respostas erradas foi maior para a turma B (22%) do que para a turma A (11%). Assim, houve alunos (8%) que induzidos pela afirmação do enunciado: “as classificações mais altas foram obtidas na turma A”, acharam-na relevante para o caso e

concluíram que, devido a esse facto, a média não podia ser igual para as duas turmas e outros (11%) afirmaram que, considerando a afirmação do enunciado: “50% dos alunos da turma B obtiveram classificação inferior ou igual a 13 valores”, a média da turma B não podia ser 14 valores.

Questão 3

Nesta questão, sabendo que a média dos pesos de nove pessoas é 78 quilogramas e que uma delas pesa 70 quilogramas, questiona-se sobre um peso possível para cada uma das restantes oito pessoas.

A maioria dos alunos (60%) respondeu correctamente a esta questão e não responderam 16% dos alunos. As respostas correctas foram variadas, sendo as mais frequentes a apresentação de vários pesos, entre 57 e 90 quilogramas (35%), e “cada uma pesa 79 quilogramas” (22%). Nestes casos, os alunos ou basearam-se na aplicação do *algoritmo da média* ou limitaram-se a apresentar uma série de valores possíveis para o peso das restantes oito pessoas sem dar outro tipo de justificação, o que pode ter implícito o recurso a *estratégias de compensação* ou de *tentativa e erro*.

O *algoritmo da média*, como nem sempre foi usado de forma adequada à situação, nem sempre conduziu à resposta correcta. Ou seja, houve alunos que fizeram uma interpretação incorrecta do enunciado – aplicaram o algoritmo a uma situação diferente da enunciada, outros manifestaram uma compreensão incorrecta do significado dos termos do algoritmo e, por vezes, indicaram bem a equação mas não a resolveram. Este abandono antecipado do raciocínio desenvolvido também ocorreu quando foram usados raciocínios de tentativa e erro ou de compensação, levando os alunos a respostas incorrectas ou inconclusivas.

Questão 4

Nesta questão determina-se a média do número de irmãos dos alunos de uma escola, cuja distribuição é apresentada sob a forma de gráfico de barras.

Embora a maioria dos alunos (54%) tivesse respondido correctamente a esta questão (a média é 1,9), a percentagem de respostas incorrectas (46%) é também considerável. As respostas correctas basearam-se na aplicação do *algoritmo da média ponderada*.

Quanto às dificuldades sentidas pelos alunos, algumas centraram-se na *interpretação do gráfico*, ou seja, o que significam e como estão relacionados os eixos no contexto do problema. Verificou-se, então, que os alunos cometeram os erros de não relacionar o sistema de eixos (14%), ou seja, determinaram o quociente da soma das frequências absolutas (eixo das ordenadas), com excepção do valor correspondente a zero irmãos, pela soma dos valores da variável (eixo das abcissas); calcularam a média das frequências (11%), isto é, determinaram o quociente

da soma das frequências absolutas pelo número de valores que toma a variável; consideraram um denominador incorrecto na aplicação do algoritmo (8%) – os alunos ponderaram adequadamente os valores para calcular a média, mas consideraram como denominador o valor máximo que aparece no eixo das ordenadas ou o número de valores que toma a variável; construíram uma tabela de frequências mas não souberam calcular a média (5%); calcularam a média dos valores da variável (3%), isto é, determinaram o quociente da soma dos valores que toma a variável pelo número desses valores; e confundiram (3%) a moda com a média, dando como resposta o valor mais frequente.

Fica-se, assim, com a ideia que alguns alunos manipulam os dados do gráfico sem os interpretarem no respectivo contexto, com o propósito de obterem um valor numérico que lhes pareça dar resposta ao problema. A componente de cálculo na maioria dos raciocínios consiste na utilização do algoritmo da média de forma não significativa e, por vezes, recorrendo a “falsas fórmulas”. Frequentemente, os alunos demonstram conhecer a fórmula sem lhe atribuir, no entanto, o significado adequado. Assim, embora muitos alunos conhecessem o algoritmo da média, revelaram, todavia, uma compreensão muito limitada da sua aplicação.

Questão 5

Nesta questão calcula-se a média do número de ramos de rosas vendidos durante cinco dias de uma semana, sabendo que nos quatro primeiros dias a média do número de ramos vendidos foi de 13,5 e que no quinto dia não se vendeu nenhum ramo.

Esta questão gerou bastantes dificuldades, já que apenas 49% dos alunos respondeu correctamente. As respostas correctas tiveram sempre como raciocínio de base a aplicação do *algoritmo da média*.

As respostas erradas (49%) resultaram, essencialmente, de não considerar no cálculo da nova média a ponderação da média dada pela respectiva frequência absoluta (30%), aplicar a *lei do fecho* (8%), isto é, calcular a média simples da média dada com o novo dado introduzido; e considerar *zero como elemento neutro* (5%), ou seja, basear-se na concepção de que a introdução do zero como novo dado não altera a média.

Questão 6

Nesta questão determina-se a idade de um amigo que se juntou a um grupo de três amigos com média de idades de 15 anos, sabendo-se que a média passou a ser de 16 anos para o grupo dos quatro amigos.

A maioria dos alunos (65%) respondeu correctamente (o amigo tinha de ter 19 anos) e apenas um aluno não respondeu.

As respostas correctas tiveram essencialmente por base o recurso ao *algoritmo da média* (33%). O raciocínio *tentativa e erro* (30%), em que os

alunos escolheram um valor para a idade desconhecida e verificaram, a partir do algoritmo, se a média correspondia ao valor pretendido, embora tendo sido bastante utilizado, nem sempre conduziu à resposta correcta pois houve alunos que terminaram as tentativas antes de se obter o valor exacto da média ou que interpretaram erradamente os cálculos e deram como resposta a média obtida na verificação. Além disso, este raciocínio também pode ser visto como mais elementar e menos eficiente face aos conhecimentos que os alunos deste nível de ensino devem possuir.

Da mesma forma que na questão anterior, houve respostas erradas que resultaram da aplicação da *lei do fecho* (8%), em que os alunos determinaram o valor da idade desconhecida recorrendo à média simples da média dada com o valor desconhecido, e de não afectar a média referente aos três amigos do respectivo factor (5%). Neste último caso, os alunos deram a resposta “a idade do amigo era 49 anos”, o que mostra também alguma falta de reflexão sobre a razoabilidade das respostas obtidas.

Questão 7

Nesta questão calcula-se a média dos pesos de 10 pessoas, 6 mulheres e 4 homens, sabendo-se que a média dos pesos das 6 mulheres é 60 quilogramas e a média dos pesos dos 4 homens é 80 quilogramas.

Mais de metade dos alunos (60%) respondeu correctamente que a média era 68 quilogramas, observando-se ainda uma percentagem considerável de alunos (35%) que apresentaram uma resposta errada.

De entre os raciocínios, o *algoritmo da média* foi o mais utilizado (60%) e conduziu sempre à resposta correcta.

As respostas erradas decorreram da utilização da *lei do fecho* (30%), ou seja, calcularam a média das duas médias dadas (tendo concluído que a média era 70 quilogramas) e da *adição das médias* (5%), em que a média final pretendida foi obtida adicionando as médias dadas (concluindo que a média era 140 quilogramas). Ora, esta resposta revela uma compreensão relacional do conceito de média muito limitada, pois os alunos atribuíram-lhe um valor superior à maior das médias dadas.

Questão 8

Nesta questão, sabendo-se que a média, a moda e a mediana dos vencimentos dos 50 empregados de uma empresa são, respectivamente, 120 mil escudos, 80 mil escudos e 90 mil escudos, pretendia-se interpretar o significado da média neste contexto.

As respostas foram variadas, sendo a resposta mais frequente (41%) “Salário de todos os trabalhadores dividido pelo número de trabalhadores”, que é simplesmente a *descrição do algoritmo da média*. Na segunda resposta mais referida (27%) – “Representa o valor médio dos salários” – não se acrescenta nada de significativo relativamente ao enunciado.

Verificou-se ainda que 19% dos alunos aludiram à possível *heterogeneidade dos dados*, ou seja, deram respostas do tipo: “Valor médio, pode mascarar os extremos que, se forem muito altos ou muito baixos não aparecerão”, “...não reflecte o salário de cada empregado (pode haver valores muito diferentes)” e “Os vencimentos variam, no entanto, sejam eles mais altos ou mais baixos, o valor entre todos os funcionários ronda os 120 mil escudos”, e 5% calcularam a quantia que o patrão despende, por mês, no pagamento dos ordenados.

Os restantes alunos (8%) ou deram respostas sem sentido, no contexto em causa, ou não responderam à questão.

4.2. A prática lectiva de três alunas

Os dados do questionário permitiram verificar a existência de dificuldades relativamente ao conceito de média aritmética. Perante tais dificuldades, na segunda fase do estudo, pretendeu-se verificar se elas emergem também na própria prática lectiva, reconhecer as suas influências para a prática e aprofundar a sua origem.

Conforme já foi referido, nesta segunda fase do estudo seguiu-se o percurso de três alunas: Teresa, Maria e Joana, seleccionadas de entre os estudantes que tinham respondido ao questionário, durante a leccionação da unidade de Estatística do 6.º ano no contexto da disciplina de Prática Pedagógica II (Estágio).

Faz-se, seguidamente, referência às situações relativas ao conceito de média aritmética que foram exploradas nas aulas leccionadas pelas referidas alunas, salientando-se as dificuldades por elas sentidas e as implicações para a respectiva prática lectiva.

Média envolvendo variáveis qualitativas

Teresa propôs um trabalho de grupo à turma, que consistia na recolha de dados através de um inquérito e do seu posterior tratamento e análise. Nesse trabalho, era pedido o cálculo da média. Porém, as questões que foram propostas envolviam apenas variáveis qualitativas, pelo que não fazia sentido determinar a média. Contudo, Teresa não se apercebeu desse facto, nem quando os alunos tiraram dúvidas relativamente às dificuldades na elaboração do trabalho, nem quando cada grupo apresentou o trabalho à turma.

Na apresentação dos trabalhos pelos alunos passaram-se várias situações. Um dos grupos não determinou a média porque se esqueceu, outros grupos arranjam dados alusivos a uma nova variável, também qualitativa, mas que não correspondia à que lhes foi atribuída para calcularem a média. Outro grupo apresentou dados alusivos à situação “número de vezes que cada aluno lança o dado” e calculou a média do número de lançamentos por aluno, contexto em que já fazia sentido o

seu cálculo. O comentário de Teresa a estas últimas situações foi idêntico: “não calculou a média que era precisa para o trabalho, apresentou um exemplo”.

Houve também grupos que calcularam a média alusiva aos dados que tinham recolhido efectivamente. Assim, por exemplo, aquele que estudou a questão “Um dia mais tarde gostaria muito de ser...” escreveu no cartaz em que apresentou o trabalho à turma: “2,2, é a média da tabela de frequências”, sem qualquer outra justificação. Então, Teresa pediu aos alunos para explicarem o que tinham feito e gerou-se o seguinte diálogo:

(A₁) Somámos as frequências e dividimos pelo número de profissões que havia. Fiz $1 + 3 + 4 + 1 + 6 + 5 = 20$; $20:9 = 2,2$, a média da tabela de frequências.

(T) Foste ver a média, mas não foi da tabela.

(A₁) Foi do número...

(A₂) Acho que ele contou o número de pessoas que escolheram...

(T) Ou seja, era a média do número de pessoas que escolheram essas profissões. É a média da preferência dos alunos.

O grupo que estudou o que gostavam de fazer nos tempos livres calculou também a média das frequências absolutas, concluindo que a média era 3,5. Da mesma forma, o grupo que recolheu dados sobre a cor preferida dos alunos calculou a média das frequências absolutas, concluindo que “A média das cores que os alunos do 6.º B escolheram foi de 3,5”.

Nesta altura, um aluno da turma comentou: “Dá a mesma média que no grupo [anterior] ...”. Esta observação poderia ter alertado Teresa para verificar que algo não estaria correcto. Porém, esta respondeu: “Lembra-te que foram avaliados os mesmos alunos e pode dar a mesma média”.

Mais tarde, Teresa, em conversa com a investigadora, afirmou que os alunos não tiveram dúvidas nessa parte e que ela também não reflectiu muito sobre o assunto. Contudo, confessou que não estava muito segura da situação, pois não houve nada que a alertasse para esse facto.

Fiquei na dúvida, mas como estavam todos a ter o mesmo seguimento não disse nada. (...)

Como não lhes tinha falado que havia dados que podiam se... que se podia trabalhar com a média e outros que não se podia fazer a média devidamente, talvez foi mais nesse aspecto que eu deixei ir. É que nem o programa diz nada a esse respeito, e o manual não falava sequer.

Maria não abordou a impossibilidade de cálculo da média nestes casos. Também não considera viável os alunos averiguarem esse facto, afirmando que, “para isso, tínhamos que dar antes conceitos como variáveis qualitativas e quantitativas e isso não faz parte do programa”. Todavia, perante a hipótese, levantada pela investigadora, de poder aludir a esses conceitos na sala de aula, embora de uma forma informal e a propósito de problemas abordadas na aula, ainda fica na dúvida se deverá ser uma questão a explorar com os alunos. De realçar que Maria, da primeira vez que respondeu ao questionário, não respondeu à questão que se reportava a esta situação (questão 1) e, após uma segunda análise do questionário, embora tivesse chegado a uma resposta correcta, teve dificuldades em explicar o seu raciocínio usando termos estatísticos adequados. Ela própria acabou por afirmar: “justificação correcta e científica não sei”.

Joana também não explorou com os alunos esse tipo de tarefas, confessando que quando preparou as aulas não reflectiu sobre esse assunto, embora tenha encontrado num manual de 6.º ano uma referência que alertava para esse facto. De notar que quando respondeu ao questionário pela primeira vez, na questão que se referia a esta situação (questão 1) calculou a média das frequências absolutas e quando analisou, pela segunda vez a resposta dada (após ter leccionado a unidade Estatística), continuou a concordar com o seu raciocínio. Só quando questionada pela investigadora sobre a variável em causa é que se apercebeu da situação, dizendo que não interiorizou concretamente o significado da média para estes casos.

Pode-se, assim, constatar que no caso de Maria e de Joana as dificuldades em termos conceptuais podem ter levado a evitar explorar tarefas desse tipo com os seus alunos.

Cálculo da média para dados agrupados

Joana propôs na aula uma tarefa sobre o cálculo da média, sendo pedido aos alunos para lançarem um dado 10 vezes e construírem a tabela de frequências dos resultados obtidos, que não tendo sido terminada na aula ficou para os alunos acabarem em casa. Este adiamento para a aula seguinte apresentou-se benéfico para Joana reflectir sobre a resolução da tarefa, já que esta confessou, espontaneamente, que teve algumas dificuldades no cálculo da média no caso da situação citada, pois quando o tentou fazer, calculou a média das frequências – “No início, tive dificuldades ao calcular a média, pois somei as frequências e dividi por seis.”

Apercebendo-se de que algo não estaria correcto, recorreu a tabelas de frequências diferentes, alusivas a outras pontuações, e verificou que o valor da média calculado pelo seu processo era sempre o mesmo, o que

achou estranho. Seguidamente, reflectindo sobre este facto e pedindo a ajuda de colegas, com quem discutiu o assunto, chegou à conclusão correcta. Para tal, começaram por determinar a média simples, partindo de dados não agrupados.

Estivemos a pensar [Joana e mais três colegas estagiários] e depois lá chegámos à conclusão. (...) Somámos na parte dos lançamentos e dividimos por 10. Então, por outro processo, tinha que dar a mesma média, e lá descobrimos que tínhamos que multiplicar. Há alturas em que parece que não raciocinamos muito bem, que são coisas simples e parece que quanto mais simples...

Finalmente, comentou que, neste caso, se tivesse de resolver imediatamente o exercício na aula, teria sido um pouco complicado.

Se calhar era capaz de ser complicado e eu ia ficar um pouco baralhada. Foi engraçado, eu tinha na minha mente a ideia: bem, é assim que se resolve e depois vou pegar naquilo para resolver... Mas então, isto não é assim?! E fiquei um pouco baralhada.

Teresa e Maria, embora tivessem construído tabelas de frequências com os alunos nunca as utilizaram directamente para determinar a média, recorrendo sempre aos dados originais não agrupados. As suas opções neste sentido foram justificadas, no caso de Teresa, pela influência da professora da turma que lhe transmitiu a ideia de que seria mais complicado para os alunos e a Maria não lhe pareceu relevante os alunos explorarem situações deste tipo.

Determinação de um dado sabendo a média inicial (sem esse dado) e a média final

Maria propôs para trabalho de casa um exercício do manual dos alunos: – Quatro amigos tinham, em média, 11 anos. Juntou-se ao grupo dos quatro um outro amigo. Qual é a idade desse amigo se a média passou a ser 12 anos? (semelhante à questão 6 do questionário).

Durante a correcção, um aluno registou no quadro $11+11+11+11+16 = 60$, $60:5 = 12$, o que traduz um raciocínio correcto, mas por tentativas. Prosseguindo na sua explicação, o aluno afirmou: “Somei 12 mais 12...”, onde poderá estar implícito a verificação do cálculo. Esta resposta foi de imediato contestada por Maria, dizendo: “mas a média dos quatro números é 11”. Donde, não fez qualquer menção de aproveitar o raciocínio por tentativa erro para chegar a outro método mais formal.

Outro aluno não ponderou as frequências absolutas no cálculo da média: $11+12 = 23$, $23:4 = \dots$, não chegando a acabar a sua resolução

porque Maria afirmou estar errada. Finalmente, uma aluna da turma apresentou uma resposta correcta: $4 \times 11 = 44$ anos, $5 \times 12 = 60$ anos, $60 - 44 = 16$ anos, que foi perfeitamente aceite pela Maria.

Muito embora o exercício tenha sido corrigido correctamente na aula, não foram aproveitados os erros dos alunos para os questionar sobre a situação, nem foi aceite um raciocínio que tinha por base uma estratégia de tentativa e erro. Estas falhas na exploração da tarefa, além de poderem resultar da existência de algumas dificuldades em “traduzir” os conhecimentos numa linguagem matemática acessível aos alunos, parecem também ter origem numa compreensão limitada do conceito de média, traduzindo-se na sobrevalorização de um processo de resolução – provavelmente aquele que foi pensado antes – e sem considerar outros processos igualmente válidos.

Conversando com a investigadora sobre este assunto, Maria afirmou que não teve dificuldades e que tentou pensar numa forma de abordar o exercício na sala de aula: “Fiz com uma incógnita X e estive a pensar numa maneira de eles resolverem, pois vi que não podiam perceber desta forma.”

De realçar que da primeira vez que respondeu ao questionário Maria respondeu incorrectamente a uma questão deste tipo (questão 6), não tendo em conta a frequência respeitante à média dada. Contudo, da segunda vez que analisou a questão (após ter leccionado a unidade) considerou que se tinha enganado e chegou a uma conclusão correcta aplicando o algoritmo da média.

Joana, embora utilizasse o mesmo manual que Maria, não propôs aos alunos este exercício por falta de tempo – “Foi daquelas aulas que eu não sabia se ia sobrar tempo ou não”. No entanto, afirma que é um tipo de questão à qual estava menos habituada e que envolve um raciocínio mais elaborado. A este propósito, é de referir que ela respondeu de forma incorrecta à questão 6 do questionário, revelando algumas dificuldades ao não ter em conta a frequência absoluta na aplicação do algoritmo. Segundo a aluna, este problema “Era bem diferente. Sei que tive alguma dificuldade em resolvê-lo. Ainda estive um bocadinho ali às voltas para o resolver.”

Pode-se por isso pensar que, por vezes, o contacto com questões que aparecem, por exemplo, nos manuais ou noutros documentos podem provocar uma reflexão sobre a sua resolução e levar a ultrapassar determinadas dificuldades.

Já Teresa, embora quando respondeu ao questionário tivesse dado uma resposta correcta à questão 6, considera que não é um tipo de exercício que se deva explorar com os alunos do 2.º ciclo, pois se ela também tem dificuldades, os alunos teriam muitas mais.

Relativamente a situações análogas, como a questão 3, em que é

dada a média e um dos dados e se pede para indicar os outros dados da distribuição, Joana considera não ser viável a sua exploração por alunos do 6.º ano porque estes não têm conhecimentos para as resolver da forma que acha possível, ou seja, através da resolução de uma equação. Teresa partilha a mesma opinião, afirmando que “era complicado para os alunos do 2.º ciclo”, já que teria dificuldades em abordar a resolução de tais situações ao nível dos alunos.

Pode-se assim constatar, por estes e outros exemplos já citados, que, por vezes, as dificuldades em adaptar os conhecimentos ao nível dos alunos condicionam a selecção de tarefas a explorar na sala de aula. Este condicionamento foi explicitamente assumido por Joana e por Teresa, e também se verificou no caso da Maria. Por exemplo, Joana afirmou que o facto de pensar que não conseguia explicar bem um exercício era razão para não o escolher e seleccionar outro para explicar a mesma coisa. No mesmo sentido, Teresa declarou que um dos critérios de selecção das tarefas foi a facilidade que tinha em as explicar: “ser mais fácil de eu lhes explicar”, admitindo que se encontrasse algo um pouco mais complicado colocava praticamente de lado. E Maria também manifestou alguma relutância em aceitar como adequadas para propor aos alunos algumas tarefas do questionário, nas quais teve algumas dúvidas ou dificuldades ao resolvê-las.

O facto de as estagiárias estarem a ser avaliadas pode ter contribuído para que algumas dificuldades não tenham sido evidenciadas, já que elas tentaram evitar propor tarefas em que tivessem a percepção de não as conseguirem explorar do ponto de vista dos alunos.

5. Conclusões

No que diz respeito ao conceito de média aritmética, da primeira fase do estudo, pode concluir-se que os alunos conhecem o seu algoritmo, mas nem sempre utilizam esse conhecimento de forma significativa.

Por exemplo, a aplicabilidade do conceito de média, quando estão em causa variáveis qualitativas, ainda origina muitas dificuldades, pois apenas 38% dos alunos consideraram que, nesse caso, não é possível calcular a média e muito menos alunos (14%) usaram raciocínios considerados válidos. Em geral, os alunos tentaram encontrar um valor numérico que representasse a média, manipulando os dados sem ter em conta o contexto. Neste caso, o cálculo da média das frequências foi o erro mais frequente.

O cálculo da média a partir de um gráfico de barras também gerou bastantes dificuldades, tendo-se obtido apenas 54% de respostas correctas, fundamentalmente obtidas por aplicação do algoritmo da média. Muitos dos erros cometidos deveram-se ao facto de os alunos não interpretarem correctamente cada um dos eixos e a relação entre eles.

Carvalho (1996), também em relação à média, verificou que alunos de 7.º ano se centravam no aspecto visual do gráfico de barras e ignoravam as relações nele existentes.

Para vencerem as suas dificuldades, os alunos devem trabalhar desde cedo com gráficos (Curcio, 1989) que surjam em contexto real, no âmbito de trabalhos de projecto (Ainley, 1994). O contexto real constitui um bom meio para desenvolver intuições, as quais terão um grande potencial na compreensão futura de aspectos mais complexos.

A dificuldade dos alunos em resolver problemas envolvendo o cálculo de uma média ponderada, já observada nos estudos de Gattuso e Mary (1998), Li e Shen (1994), Mevarech (1983) e Pollatsek *et al.* (1981), foi igualmente proeminente em várias das questões estudadas na presente investigação.

Neste estudo detectaram-se, ainda, concepções erradas sobre as relações entre a média e a distribuição. Alguns alunos (11%) referiram que a média não podia ser superior ao valor máximo possível de 50% dos dados e outros (8%) consideraram que o facto de uma turma ter classificações mais altas que outra era impeditivo da média ser igual nas duas turmas. Concepção semelhante a esta última foi igualmente identificada por Dreyfus e Levy (1996) com alunos de 11 e 12 anos.

Finalmente, em relação ao significado da média num contexto de vencimentos dos empregados de uma empresa, os alunos não foram além da descrição do algoritmo da média, tal como aconteceu no estudo de Boaventura (2003). Uma possível explicação para as dificuldades dos alunos residirá certamente na não abordagem nas aulas de Estatística deste aspecto, o que também acontece com outras estatísticas (Fernandes & Barros, 2005).

Na segunda fase do estudo, centrada no ensino da unidade de Estatística por três alunas que participaram na primeira fase, confirma-se em todas elas um conhecimento instrumental da média aritmética, centrado no nível computacional, em contraste com um conhecimento relacional, em que o conceito é mobilizado para a resolução de situações da vida real (Skemp, 1987). A ausência de um conhecimento relacional suficientemente desenvolvido, o que, segundo Batanero (2000), também pode ser visto como uma exploração insuficiente do campo de problemas de onde emerge o conceito, assume-se como um aspecto crítico, pois é este tipo de conhecimento que revela a importância da Estatística para os cidadãos.

A prevalência da faceta mais algorítmica do conceito de média aritmética nas três alunas repercutiu-se no seu ensino de três formas distintas, embora interligadas: pouca diversidade das tarefas a serem exploradas, pouca flexibilidade na sua exploração e baixa confiança nas capacidades dos alunos para explorarem certo tipo de tarefas.

Particularmente nas tarefas menos rotineiras, em que as alunas revelavam maiores dificuldades, observou-se uma tendência para as omitir na sala de aula, justificando-se, por vezes, a sua não inclusão pelo facto de não estarem ao alcance dos alunos. A este propósito, segundo Teresa, as dificuldades que admitiu sentir na questão 6 seriam mais agravadas para os alunos. Em consequência, não achou adequado explorar com eles tarefas desse tipo.

Na questão 3, em que é dada a média e um dos dados e se pede para indicar os outros dados da distribuição, Joana pensou na resolução da questão através de uma equação. Ora, não possuindo os alunos essa ferramenta matemática, o caminho a seguir era não apresentar tais tarefas aos alunos, ignorando outros caminhos ao alcance destes para enfrentar tais situações. Esta perspectiva limitada e rígida do conceito de média influenciou todas as alunas na selecção das tarefas a serem propostas aos alunos, avançando mesmo Teresa como critério dessa selecção a facilidade que tinha em as explicar e deixando de parte aquelas em que sentia alguma dificuldade.

Em geral, ao longo das duas fases do estudo, perante as dificuldades evidenciadas pelos alunos, que se salientaram mais nas actividades não rotineiras, pode-se concluir que estas se devem a uma compreensão superficial dos conceitos, corroborando, de certa forma, a opinião de Tormo (1995, p. 30):

Os estudantes têm uma grande predisposição para se centrarem na aprendizagem de fórmulas e regras para resolver um problema-tipo. Tentam mecanizar os problemas, o que os impede de resolver problemas de contexto em que têm que transladar para a situação descrita a fórmula aprendida. Esta forma de 'aprender' impede-os de chegar à conclusão real do conceito.

Esta situação torna-se um pouco mais problemática quando tem uma interferência mais directa na própria prática pedagógica e, por consequência, na abordagem das tarefas que se realizam com os alunos. Pode-se, pois, em certa medida, argumentar que as dificuldades provenientes da aplicação não rotineira dos conceitos e da capacidade de exploração das tarefas ao nível dos alunos, capacidade centrada no raciocínio pedagógico do professor (Brown & Borko, 1992), são factores que têm uma influência decisiva no tipo de opções que os futuros professores fazem relativamente ao que e como explorar na sala de aula.

Visto que os participantes do presente estudo serão futuramente professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico e que fazem parte destes níveis de ensino alguns conceitos elementares de estatística e probabilidades, inclusive questões semelhantes às estudadas poderão ser

exploradas e que, mesmo estando no último ano da sua formação inicial, há dificuldades que se mantêm, torna-se imprescindível confrontar os estudantes com estes e outros tipos de problemas, discutindo as suas respostas e fazendo-os reflectir sobre elas. Esta atitude de reflexão, para além de esclarecer dúvidas e promover um debate sobre as dificuldades sentidas, abre horizontes para um conhecimento mais amplo da diversidade de problemas estocásticos que se podem debater na sala de aula, permitindo-lhes sair da rotina dos problemas típicos de aplicação directa de fórmulas e orientar os seus alunos na superação de dificuldades que parecem persistir ao longo de toda uma escolaridade.

Bibliografia

- Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ainley, J. M. (1994). Building on children's intuitions about graphs. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Educational* (Vol. 2, pp. 1-8). Lisboa: Universidade de Lisboa.
- Barros, P. M. (2003). *Os futuros professores do 2.º ciclo e a estocástica: Dificuldades sentidas e o ensino do tema*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Batanero, C. (2000). Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementares: el caso de las medidas de posición central. In C. Loureiro, O. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 31-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática e Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. Versão ampliada do trabalho publicado In H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación educativa* (pp. 310-304). Universidade de Granada. Recuperado em 15 de Dezembro, 2000, de <http://www.ugr.es/~batanero>
- Boaventura, M. G. (2003). *Dificuldades de alunos do ensino secundário em conceitos estatísticos*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Brown, C. & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York, NY: Macmillan.
- Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm: student's understanding of the arithmetic average concept. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference* (Vol. 3, pp. 144-151).

Universidade Federal de Pernambuco.

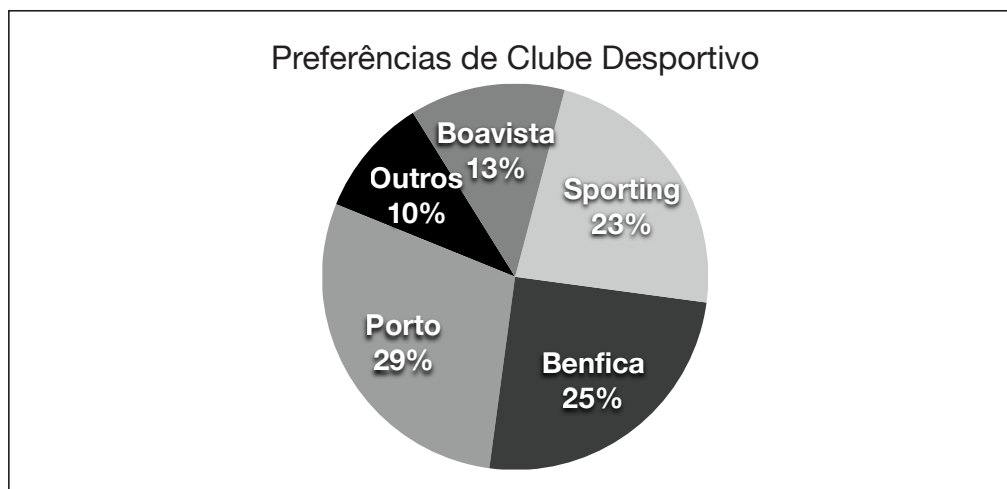
- Carvalho, C. (1996). Algumas questões em torno de tarefas estatísticas com alunos do 7.º ano. In A. Roque & M. J. Lagarto (Orgs.), *Actas do ProfMat 96* (pp. 165-171). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing Graph Comprehension: Elementary and Middle School Activities*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dreyfus, A. & Levy, O. (1996). Are the notion of mean and related concepts too difficult for 6th and 7th grade biology students? *European Journal of Teacher Education*, 19(2), 137-152.
- Fernandes, J. A. & Barros, P. M. (2005). Dificuldades em estocástica de uma futura professora do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. *Revista Portuguesa de Educação*, 18(1), 117-150.
- Gattuso, L. & Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school children. In L. Pereira-Mendoza, L. S. Kea & W. Wong (Eds.), *Proceedings of the fifth international conference on teaching statistics* (pp. 685-691). Singapura: International Association for Statistical Education.
- Leon, M.R. & Zawojewski, J.S. (1991). Use of the arithmetic mean: an investigation of four properties issues and preliminary results. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 1, pp. 302-306). International Statistical Institute.
- Li, K. & Shen, S. M. (1994). Students' weaknesses in statistical projects. In D. Green (Ed.), *Teaching statistics at its best* (pp. 42-48). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
- Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.
- Pollatsek, A., Lima, S. & Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- Ponte, J. P. & Fonseca, H. (2000). A estatística no currículo do ensino básico e secundário. In C. Loureiro, O. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 179-194). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática e Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Strauss, S. & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics*

Education, 19 (1), 64-80.

Tormo, C. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la media aritmética. *UNO*, 5, 29-36.

Anexo

1. As preferências de clube desportivo dos 200 alunos, do 2º ciclo, de uma escola são dadas pelo seguinte gráfico:



Observando o gráfico, determine, caso seja possível, a média das preferências de clube. Justifique a sua resposta.

2. Relativamente às classificações finais em Matemática de duas turmas, A e B, sabe-se que:

- as classificações mais altas foram obtidas na turma A;
- na turma A não existe qualquer aluno com classificação de 14 valores;
- o João, da turma B, obteve a classificação de 16 valores;
- 50% dos alunos da turma B obtiveram classificação inferior ou igual a 13 valores.

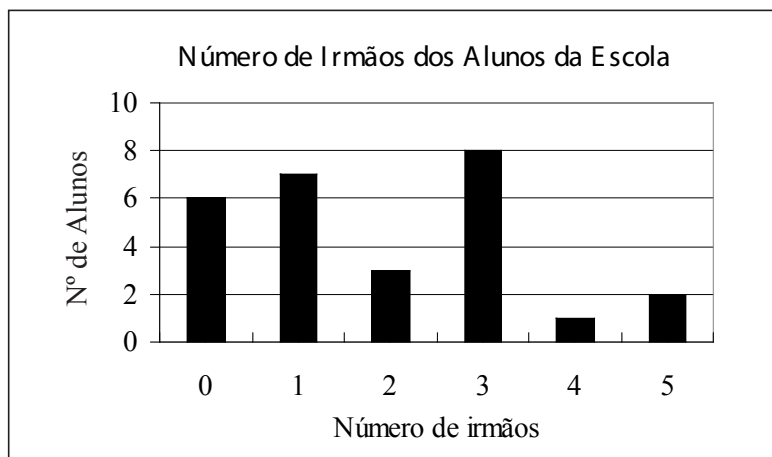
O João determinou a média das classificações de ambas as turmas e obteve os seguintes resultados:

| Turma | Média |
|-------|------------|
| A | 14 valores |
| B | 14 valores |

Face aos dados fornecidos, averigüe, justificando, se as médias das classificações de cada turma podem assumir os valores calculados pelo João.

3. A média do peso de nove pessoas é 78 quilos. Admitindo que uma delas pesa 70 quilos, indique um peso possível para cada uma das restantes oito pessoas.

4. Perguntou-se aos alunos de uma escola, do 1º ciclo, quantos irmãos tinham. A partir das respostas obtidas, construiu-se o seguinte gráfico:



Observando o gráfico, determine a média do número de irmãos dos alunos da escola.

5. A D. Alice esteve no mercado a vender ramos de rosas durante 5 dias de uma semana. Nos 4 primeiros dias, a média de ramos vendidos por dia foi de 13,5. No quinto dia não vendeu nenhum ramo. Determine a média do número de ramos de rosas vendidos durante os cinco dias dessa semana.

6. A média das idades de um grupo de três amigos é 15 anos. Juntou-se ao grupo um outro amigo. Sabendo que a média das idades dos quatro amigos passou a ser 16 anos, determine a idade do amigo que se juntou ao grupo.

7. Há 10 pessoas num elevador, 6 mulheres e 4 homens. A média do peso das mulheres é 60 quilos, e a média do peso dos homens é 80 quilos. Determine a média do peso das 10 pessoas que se encontram no elevador.

8. Numa empresa trabalham, ao todo, 50 empregados. Acerca dos seus vencimentos sabe-se que a média é 120 mil escudos, a moda é 80 mil escudos e a mediana é 90 mil escudos. No contexto da situação apresentada, interprete o significado da média.